Reste zur Differenzialrechnung

Die Ableitung der Exponentialfunktion ist:
wenn $f(x) = k\cdot e^{\lambda x}$ ➔ $f'(x) = k\cdot e^{\lambda x}\cdot\underline{\lambda}$ und wenn $f(x) = k\cdot a^x$ ➔ $f'(x) = k\cdot a^x\cdot\underline{\ln(a)}$

1) Eine Ortschaft hat zur Jahrtausendwende 20000 Einwohner und 10 Jahre später 21500 Einwohner. Nimmt man exponentielles Wachstum an:
− wie lautet die Wachstumsfunktion
− wie viel Einwohner hat die Stadt 2002?
− wie groß ist die (durchschnittliche) Wachstumsrate pro Jahr, im Intervall von 2000 bis 2002?
− wie groß ist die (durchschnittliche) Wachstumsrate pro Jahr, im Intervall von 2009 bis 2010?
− wie groß ist die (momentane) Wachstumsrate pro Jahr für 2010?

2) Eine Ortschaft hat im Jahr 1990 2580 Einwohner, im Jahr 1995 2650 Einwohner. Nimmt man exponentielles Wachstum an:
− wie lautet die Wachstumsfunktion?
− wie viel Einwohner hat die Stadt 2005?
− wie groß ist die (durchschnittliche) Wachstumsrate pro Jahr, im Intervall von 1990 bis 1995?
− wie groß ist die (durchschnittliche) Wachstumsrate pro Jahr, im Intervall von 1995 bis 2010?
− wie groß ist die (momentane) Wachstumsrate pro Jahr für 2010?

3) Eine Ortschaft hat die Wachstumsfunktion $N(t) = 85400\cdot 1{,}02^t$ mit t ab 2004 und N(t) Einwohner.
− Berechne wie viel Einwohner die Ortschaft im Jahr 2013 hatte und gib die Wachstumsrate pro Jahr für das Intervall [2004,2013] an.
− Berechne die Ableitung der Wachstumsfunktion und ermittle damit die momentane Wachstumsrate für 2013.

4) Die Bevölkerung von Österreich wächst etwa linear im Zeitraum von 2010 bis 2013 von 8.361.069 auf 8.477.230 Einwohner an.
− Erstellen Sie eine Funktion, die zur Angabe von t (Jahre seit 2000) die Anzahl der Einwohner N(t) angibt und berechnen Sie damit die Einwohneranzahl im Jahre 2020.
− Erklären Sie, warum die durchschnittliche Wachstumsrate dieser Funktion mit der momentanen Wachstumsrate immer übereinstimmt, egal, für welche Zeiten

5) Die Bevölkerung von Österreich wächst im Zeitraum von 2010 bis 2013 von 8.361.069 auf 8.477.230 Einwohner an. Nehmen Sie nun an, dass die Bevölkerung exponentiell wächst.
− Erstellen Sie eine Funktion, die zur Angabe von t (Jahre seit 2000) die Anzahl der Einwohner N(t) angibt und berechnen Sie damit die Einwohneranzahl im Jahre 2020.
− Erklären Sie, warum die durchschnittliche Wachstumsrate dieser Funktion nicht mit der momentanen Wachstumsrate übereinstimmt am Beispiel der durchschnittlichen Wachstumsrate von 2010 bis 2013 und der momentanen Wachstumsrate im Jahre 2013.

Lösungen:

1) $N_t = 20000\cdot 1{,}00726^t = 20000\cdot e^{0{,}007232\cdot t}$	20291	145,7	155	155,5
2) $N_t = 2580\cdot 1{,}00537^t = 2580\cdot e^{0{,}005354\cdot t}$	2796	14	14,8	15,37
3) 102.061 1851 $N'(t)=85400\cdot 1{,}02^t\cdot\ln(1{,}02) = 2021$				
4) $N_t = 38720\cdot t + 7.973.866$	8.748.266	weil $N'_t = 38720$ konstant		
5) $N_t = 8361069\cdot 1{,}0046097^{t-10}$ 8.754.587	38720	38988		